Loop group actions on harmonic maps and Morse-Bott theory(State of art and perspectives of studies on nonlinear integrable systems)

大仁田, 義裕

数理解析研究所講究録
822巻 1993年 110-122

Loop group actions on harmonic maps and Morse-Bott theory

都立大理　大仁田義裕 (Yoshihiro Ohnita)

M, N をリーマン多様体とする。M から N への C^∞-写像 $\varphi: M \longrightarrow N$ の "エネルギー (energy)" は,

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M \|d\varphi\|^2 dv$$

によって定義される。コンパクトな台を持つ φ の任意の変分に対して, そのエネルギーの第1変分が0になるとき, φ は調和写像 (harmonic map) である呼ばれる。$\dim M = 2$ のとき, 写像のエネルギーは 共形不変である, すなわち, M のリーマン計量の任意の共形変形に対して不変である。そこで, $\dim M = 2$ のときには, リーマン多様体 M を考えるよりもリーマン面 $M = \Sigma$ を考える方が, harmonic maps の研究においては自然である。また, リーマン面 Σ からリーマン多様体 N への C^∞-写像 φ は,

$$\varphi^* g_N = \| d\varphi(\tfrac{\partial}{\partial z})\|^2 dz\, d\bar{z}$$

を満たすとき，“弱共形的(weakly conformal)”である呼ばれる。ここで，$\{z\}$ は Σ の局所複素座標，g_N はNのリーマン計量を表わす。$d\varphi(\frac{\partial}{\partial z})$ の zero 点 は，φ の branch point と呼ばれる。weakly conformal, harmonic map $\varphi : \Sigma \longrightarrow N$ は，branched minimal immersion に他ならない，よって，$\varphi(\Sigma)$ は，branch point において特異点を持つ極小曲面である。リーマン球面 S^2 からの harmonic map $\varphi : S^2 \longrightarrow N$ は，weakly conformal になることが知られている。3次元 Euclid 空間内のプラトー問題は，conformal, harmonic map の存在を示すことによって，証明された（ダグラス，ラドー）。Harmonic Map Theory は，極小曲面論に端を発し，幾何学・大域解析学の重要な一分野として現在までいろいろ立場から広範に研究されてきた。これに関しては，Eells と Lemaire による3つの有名な reports がある（[EL1]，[EL2]，[EL3]）。

1. Harmonic maps into Lie groups & symmetric spaces.

リーマン面 Σ から 球面，射影空間，グラスマン多様体，リー群や対称空間 など微分幾何的に豊かな構造を持つリーマン多様体への調和写像の組織的な構成として分類は，大変

興味ある問題である。この方面の先駆的仕事は，Calabi，Chern によるリーマン球面 S^2 から標準的球面 S^n への調和写像の分類の理論である（[Ca]，[Ch]）．リーマン球面からより一般のコンパクト対称空間やリー群への調和写像の分類・構造理論に関しては，ここ約10年間に大きく発展した。これについては，[EL3] を参照されたい。それは，ゲージ理論，ツイスター幾何学，ループ群論，可積分系の理論などとの密接な関連が注目されている。この領域において，[Uh] は，重要な仕事の1つである。[Uh] では，次の2つのことが議論された：

(1) （単連結）リーマン面からユニタリー群 $U(n)$ への調和写像へのある $GL(n,\mathbb{C})$ 値有理関数の群の作用の導入．

(2) リーマン球面からユニタリー群 $U(n)$ への調和写像に対する "ユニトン (uniton)" と呼ばれる因子への因数分解定理 (factorization theorem) の証明．

(2) は，そのような調和写像が，複素グラスマン多様体の有理曲線からどのような操作で得られるかという "原理" を与えるものである。より explicit な記述が，J.C. Wood によって与えられた（[Wd]）．また，G. Segal は，ループ群論における Grassmannian model（cf. [PS]）

を利用して(2)の factorization theorem のまったく自然な証明を与えた([Se]). この方法の利点は，その幾何学的性格がより強調されるところにあり，さらなる調和写像の研究に大いに役立つであろうと思われる。

M.A. Guest と私の共同研究は，(1)の調和写像への無限次元群の作用をより幾何学的に理解し，調和写像の空間の構造の研究に応用しようという目的から始まった。少なくともわれわれには，(1)の群の作用は，応用上決してわかり良いものではなかった。

以下，[GO] そして [FGKO] の仕事について述べる。

G をコンパクト連結リー群，$\mathfrak{g}$ をそのリー代数とする。G には，両側不変リーマン計量を定めておく。これにより，G は コンパクト対称リーマン空間になる。μ_G を G の Maurer-Cartan form とする。μ_G は，恒等式

$$d\mu_G + \frac{1}{2}[\mu_G \wedge \mu_G] = 0$$

を満たすことがよく知られている(Maurer-Cartan 方程式).

今，$\varphi : \Sigma \longrightarrow G$ を C^∞-写像 とする。φ による μ_G の引き戻しを，

$$\alpha = \varphi^* \mu_G = \varphi^{-1} d\varphi$$

とおく。α は，Σ 上の $\mathfrak{g}$ 値の 1-form であり，

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0 \qquad \text{—— (1.1)}$$

を満たす。

α のリーマン面 Σ の複素構造に関して α の (1,0)-成分, (0,1)-成分をそれぞれ α', α'' で表わす。

Prop. 1.1.

φ harmonic

$\Longleftrightarrow$

$$\bar{\partial}\alpha' - \partial\alpha'' = 0 \qquad \text{—— (1.2)}$$

ここで, $d = \partial + \bar{\partial}$.

より一般に, C^∞-写像 $\varphi : \Sigma \longrightarrow G^{\mathbb{C}}$ が (1.2) を満たすときも, φ は harmonic であると呼ぶことにする。ここで, $G^{\mathbb{C}}$ は, G の複素化を表わす。

2. Extended solutions to harmonic maps.

リー群への調和写像の研究の基礎となるのは, "extended solution" と呼ばれる $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ によってパラメータ付けされた $G^{\mathbb{C}}$ への写像の族を導入することである ([ZM], [ZS], [Uh]).

今, $\alpha = \alpha' + \alpha''$ をリーマン面 Σ 上の $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 値の 1-form とする。α', α'' は α の (1,0)-, (0,1)- 成分を表わす。

各 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対して, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 値の 1-form α_λ を,

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})\alpha' + \frac{1}{2}(1-\lambda)\alpha''$$

と定める。

一階線型偏微分方程式：

$$(*) \qquad \Phi_\lambda^* \mu_{G^{\mathbb{C}}} = \alpha_\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{C}^*)$$

又は，

$$(**) \quad \begin{cases} \partial \Phi_\lambda = \frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})\,\Phi_\lambda \alpha', \\ \bar{\partial} \Phi_\lambda = \frac{1}{2}(1-\lambda)\,\Phi_\lambda \alpha'' \qquad (\lambda \in \mathbb{C}^*) \end{cases}$$

を考える。

このとき，単純な計算により，(*) 又は (**) の完全積分可能条件：

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{C}^*)$$

は，(1.1) および (1.2) と同値であることがわかる。

(*) 又は (**) の solutions $\Phi = \Phi_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{C}^*)$ を，"extended solution (to harmonic map equation)" と呼ぶ。

従って，次を得る。

<u>Thm. 2.1.</u> ([Uh], [ZM], [ZS]).

Σ を単連結と仮定する。$\varphi : \Sigma \longrightarrow G$ を harmonic map とする。$\forall z_0 \in \Sigma$, $\forall \sigma : \mathbb{C}^* \longrightarrow G^{\mathbb{C}}$ に対して，extended solution $\Phi : \mathbb{C}^* \times \Sigma \longrightarrow G^{\mathbb{C}}$ が唯一つ存在して，$\Phi_\lambda(z_0) = \sigma(\lambda)$ となる。

この場合，γを適当に選ぶことにより，$\Phi_1 \equiv e$ かつ $\Phi_\lambda : \Sigma \longrightarrow G$ （$\lambda \in S^1 = \{|\lambda| = 1\}$） なるような extended solution が取れる。そのような extended solution は，ループ群への写像と見なすことができる。

今，Gの基点付きループの群

$$\Omega G = \{ \gamma : S^1 \longrightarrow G \ \text{smooth}, \gamma(1) = e \}$$

を考える。全射 $\pi : \Omega G \longrightarrow G$ を $\pi(\gamma) = \gamma(-1)$ により定める。Thm. 2.1 によって，Σ が単連結ならば，任意の harmonic map $\varphi : \Sigma \longrightarrow G$ に対して，$\varphi = \pi \circ \Phi$ となる extended solution $\Phi : \Sigma \longrightarrow \Omega G$ が存在する。さらに，ΩG（をcompletionしたもの）は，無限次元の複素ケーラー多様体の構造を持つが知られている (see [PS])。（左不変な）その複素構造は，

$$T_e \Omega G^{1,0} = \bigoplus_{\alpha > 0} (\lambda^{-\alpha} - 1) \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$$

で定められる。(*) 又は (**) から，extended solution $\Phi : \Sigma \longrightarrow \Omega G$ は，この（標準的な）複素構造に関して正則写像 (holomorphic map) であることがわかる。

harmonic map $\varphi : \Sigma \longrightarrow G$ は，λ について有限なローラン展開 $\Phi_\lambda = \sum_{\alpha=0}^{m} \lambda^\alpha T_\alpha$ の extended solution Φ を持つとき，φ は "finite uniton number" を持つと言い，そのような最小の m を φ の "minimal uniton number" と言う。

この概念は，[Uh] において導入され，finite uniton number の harmonic maps に対しては，"unitons" への factorization theorem が示された。

3. Dressing action ([ZM], [ZS], [BG]).

harmonic maps への無限次元群の作用は，次の "dressing action" のアイデアに従って定式化される。

$\mathcal{G}$ を 1 つの群，$\mathcal{G}_1$，$\mathcal{G}_2$ を $\mathcal{G}$ の 2 つの部分群で $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2$，$\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \{e\}$ と仮定する。$\forall g \in \mathcal{G}$ に対して，$g = g_1 g_2$，$g_1 \in \mathcal{G}_1$，$g_2 \in \mathcal{G}_2$ と一意分解を持つ。そこで，$\mathcal{G}$ のそれ自身の群作用を，

$\forall g, h \in \mathcal{G}$ に対して，

$$g \cdot h = g h (h^{-1} g h)_2^{-1} = h (h^{-1} g h)_1$$

により定める．$g \cdot (g' \cdot h) = (g g') \cdot h$ $(g, g', h \in \mathcal{G})$ は，すぐに検証される。

4. Birkhoff and Uhlenbeck actions.

まず，ループの Birkhoff decomposition theorem を思い出す。

<u>Thm. 4.1</u> (see [PS, Thm. (8.1.2)]).

$\forall \gamma \in LG^{\mathbb{C}} = \{ \gamma : S^1 \longrightarrow G^{\mathbb{C}} \text{ smooth} \}$ は，

$$\gamma = \gamma_- \delta \gamma_+ \ , \quad \gamma_- \in L^-G^{\mathbb{C}},\ \delta \in \check{T},\ \gamma_+ \in L^+G^{\mathbb{C}}$$

と分解され得る。ここで,

$L^+G^{\mathbb{C}} = \{ \gamma \in LG^{\mathbb{C}} \mid \gamma$ extends continuously to a holomorphic map $\{|\lambda|<1\} \longrightarrow G^{\mathbb{C}} \}$,

$L^-G^{\mathbb{C}} = \{ \gamma \in LG^{\mathbb{C}} \mid \gamma$ extends continuously to a holomorphic map $\{|\lambda|>1\} \longrightarrow G^{\mathbb{C}} \}$,

$\check{T} = \{ \gamma : S^1 \longrightarrow T$ homomorphism $\}$,

T は G の maximal torus.

さらに,

$$\begin{array}{ccc} L^-_1G^{\mathbb{C}} \times L^+G^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & L^-G^{\mathbb{C}}L^+G^{\mathbb{C}} \\ \Psi & & \Psi \\ (\gamma_-, \gamma_+) & \longmapsto & \gamma_-\gamma_+ \end{array}$$

は微分同相で, $L^-G^{\mathbb{C}}L^+G^{\mathbb{C}}$ は $LG^{\mathbb{C}}$ の identity component の open dense subset である. ここで, $L^-_1G^{\mathbb{C}} = \{ \gamma \in L^-G^{\mathbb{C}} \mid \gamma(1) = e \}$。

dressing action の定義において, $\mathcal{G} = LG^{\mathbb{C}}$, $\mathcal{G}_1 = L^-_1G^{\mathbb{C}}$, $\mathcal{G}_2 = L^+G^{\mathbb{C}}$ を取る。ただし, この場合は $\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2 \neq \mathcal{G}$ なので, "pseudo-action" と言う。

<u>Def.</u> $LG^{\mathbb{C}}$ のそれ自身の "Birkhoff pseudo-action" は, $\forall \gamma, \delta \in LG^{\mathbb{C}}$ で $\delta^{-1}\gamma\delta \in L^-_1G^{\mathbb{C}} \cdot L^+G^{\mathbb{C}}$ なるものに対して,

$$\gamma^\# \delta = \gamma\delta(\delta^{-1}\gamma\delta)_+^{-1} = \delta(\delta^{-1}\gamma\delta)_- \in LG^{\mathbb{C}}$$

と定義される。

このpseudo-actionは，次によりharmonic mapsと重要な関わりを持つ。

Prop. 4.2 ([ZM], [ZS], [Uh], [BG]).

$\gamma \in LG^{\mathbb{C}}$, $\Phi : S^1 \times \Sigma \longrightarrow G^{\mathbb{C}}$ extended solutionとする。もし，$\Phi(z)^{-1}\gamma\,\Phi(z) \in L_1^{-}G^{\mathbb{C}}L^{+}G^{\mathbb{C}}$ $(\forall z \in \Sigma)$ ならば，$\gamma \# \Phi : S^1 \times \Sigma \longrightarrow G^{\mathbb{C}}$ もまたextended solutionである。

われわれが特に関心を持つのは，Gへのharmonic maps，よってΩGへのextended solutionであるから，適当な"reality condition"を課する必要がある。

今，$0 < \varepsilon < 1$ とする。$S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上で，$0, \infty$ をそれぞれ中心とする2つの円 $C_0 = \{|\lambda| = \varepsilon\}$, $C_\infty = \{|\lambda| = \frac{1}{\varepsilon}\}$ を取る。$C = C_0 \amalg C_\infty$, $I = I_0 \amalg I_\infty$, $E = S^2 \setminus C \cup I$ とおく。ここで，$I_0 = \{|\lambda| < \varepsilon\}$, $I_\infty = \{|\lambda| > \frac{1}{\varepsilon}\}$.

$$L_{\mathbb{R}}^{0,\infty}G^{\mathbb{C}} = \{\gamma : C \longrightarrow G^{\mathbb{C}} \text{ smooth}, \ \gamma(\bar{\lambda}^{-1})^{*} = \gamma(\lambda)^{-1} \ (\forall \lambda \in C)\},$$

$$L_{\mathbb{R}}^{E}G^{\mathbb{C}} = \left\{\gamma \in L_{\mathbb{R}}^{0,\infty}G^{\mathbb{C}} \,\middle|\, \begin{array}{l}\gamma \text{ extends continuously to} \\ \text{a holomorphic map } E \longrightarrow G^{\mathbb{C}}\end{array}\right\},$$

$$L_{\mathbb{R}}^{I}G^{\mathbb{C}} = \left\{\gamma \in L_{\mathbb{R}}^{0,\infty}G^{\mathbb{C}} \,\middle|\, \begin{array}{l}\gamma \text{ extends continuously to} \\ \text{a holomorphic map } I \longrightarrow G^{\mathbb{C}}\end{array}\right\}$$

と定める。このとき，Thm.4.1から次がわかる([BG]):

$$L_{1,\mathbb{R}}^{E}G^{\mathbb{C}} \times L_{\mathbb{R}}^{I}G^{\mathbb{C}} \longrightarrow L_{\mathbb{R}}^{E}G^{\mathbb{C}}L_{\mathbb{R}}^{I}G^{\mathbb{C}}$$

は微分同相で，$L_{\mathbb{R}}^{E}G^{\mathbb{C}}L_{\mathbb{R}}^{I}G^{\mathbb{C}}$ は $L_{\mathbb{R}}^{0,\infty}G^{\mathbb{C}}$ のidentity componentのopen, dense subsetである。

dressing action の定義において，$\mathfrak{g}=L_{\mathbb{R}}^{0,\infty}G^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{g}_1=L_{1,\mathbb{R}}^{E}G^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{g}_2=L_{\mathbb{R}}^{I}G^{\mathbb{C}}$ を取って定義された pseudo-action を，"Uhlenbeck pseudo-action" と呼ぶ（cf. [Uh], [GO]）。
このとき，$\forall\gamma\in L_{\mathbb{R}}^{0,\infty}G^{\mathbb{C}}$, $\Phi:\Sigma\longrightarrow\Omega G$ extended solution に対して，もし，$\Phi^{-1}(z)\gamma\Phi(z)\in L_{1,\mathbb{R}}^{E}G^{\mathbb{C}}L_{\mathbb{R}}^{I}G^{\mathbb{C}}$ $(\forall z\in\Sigma)$，ならば，$\gamma\#\Phi:\Sigma\longrightarrow\Omega G$ もまた extended solution であることがわかる。大ざっぱに言って，extended solutions を介して，われわれは $L_{\mathbb{R}}^{0,\infty}G^{\mathbb{C}}$ の G への harmonic maps への pseudo-action を得た。

<u>Rem.</u> Burstall は，1992年11月21日の e-mail message で著者に，Ian McIntosh (UK) が「$L_{\mathbb{R}}^{E}G^{\mathbb{C}}L_{\mathbb{R}}^{I}G^{\mathbb{C}}=L_{\mathbb{R}}^{0,\infty}G^{\mathbb{C}}$」を示したことを伝えた。証明は，reality condition を巧く利用するが，意外な結果である。よって，上の pseudo-action は，"action" である。

5. Grassmannian model and the natural action.

G への harmonic maps に対する今1つ別の群作用を定義する。簡単のため，$G=U(n)$ とする。ΩG の Grassmannian model は次のように構成される（[PS]）：

$$Gr_\infty=\left\{W\subset H=L^2(S^1,\mathbb{C}^n)\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{closed subspace},\ \lambda W\subset W\\ pr_+:W\longrightarrow H_+\ \ \text{Fredholm operator}\\ pr_-:W\longrightarrow H_-\ \ \text{Hilbert-Schmidt operator}\\ pr_+(W^\perp),\ pr_-(W)\ \text{consists smooth functions}\end{array}\right\}$$

を考えると, Gr_∞ 上には $LG^{\mathbb{C}}$ および LG が推移的に作用していることがわかり,

$$Gr_\infty \cong LG^{\mathbb{C}}/L^+G^{\mathbb{C}} \cong LG/G \cong \Omega G$$

を得る。これから, $\forall \gamma \in LG^{\mathbb{C}}$ は,

$$\gamma = \gamma_u \gamma_+ , \quad \gamma_u \in \Omega G , \quad \gamma_+ \in L^+G^{\mathbb{C}}$$

と一意的に分解できることがわかる。ここで, $H_+ = \{ f \in H \mid f = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^\alpha \xi_\alpha \}$, $H_- = (H_+)^\perp$, pr_+, pr_- はそれぞれ H_+, H_- への Hermitian projections を表わす。

今, $\forall \gamma \in LG^{\mathbb{C}}$, $\Phi : \Sigma \longrightarrow \Omega G$ extended solution に対して, $(\gamma \natural \Phi)(z) := (\gamma \Phi(z))_u \quad (z \in \Sigma)$ と定めると, $\gamma \natural \Phi : \Sigma \longrightarrow \Omega G$ もまた extended solution であることが示される ([GO]). この群作用を "natural action" と呼ぶ。

<u>Thm. 5.1</u> ([GO])

extended solutions $\Phi : \Sigma \longrightarrow \Omega G$, Σ : compact に対して, Uhlenbeck action と natural action は一致する ($\# = \natural$!)。

これら群作用を利用して, harmonic maps の deformations や harmonic maps の空間の構造を調べようと考えるのは自然であり, 有限次元 generalized flag manifold と ΩG は特に Morse-Bott theoretic な観点から類似の構造を持ちそれを使って, いくつかの重要な場合において, harmonic maps の空間の connectedness, fundamental group を調べることができた ([GO],[FGKO])。

REFERENCES

[BG] M.J. Bergvelt and M.A. Guest, *Actions of loop groups on harmonic maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **326** (1991), 861–886.

[Bo] R. Bott, *An application of the Morse theory to the topology of Lie groups*, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 251–281.

[Ca] E. Calabi, *Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima*, Topics in Complex Manifolds, Université de Montréal, 1968, pp. 59–81.

[Ch] S.S.Chern, *On the minimal immersions of the two sphere in a space of constant curvature*, Problems in Analysis, Princeton, N.J., 1970, pp. 27–40.

[EL1] J. Eells and L. Lemaire, *A report on harmonic maps*, Bull. Lond. Math. Soc. **10** (1978), 1–68.

[EL2] J. Eells and L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, C.B.M.S. Regional Conf.Ser. in Math. Providence, RI, Amer.Math.Soc., 1983.

[EL3] J. Eells and L. Lemaire, *Another report on harmonic maps*, Bull. Lond. Math. Soc. **20** (1988), 385–524.

[FGKO] M. Furuta, M.A. Guest, M. Kotani and Y.Ohnita, *On the fundamental group of the space of harmonic 2-spheres in the n-sphere*, to appear.

[GO] M.A. Guest and Y.Ohnita, *Group actions anf deformations for harmonic maps*, to appear, J. Math.Soc. Japan.

[Kt] M. Kotani, *Connectedness of the space of minimal 2-spheres in $S^{2m}(1)$*, to appear, Proc. Amer. Math. Soc.

[Lo] B. Loo, *The space of harmonic maps of S^2 into S^4*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 81–102.

[PS] A.N. Pressley and G.B. Segal, *Loop Groups*, 1986, Oxford University Press.

[Se] G.B. Segal, *Loop groups and harmonic maps*, Advances in Homotopy Theory, L.M.S. Lecture Notes 139, Cambridge Univ. Press, 1989, pp. 153–164.

[Uh] K.K. Uhlenbeck, *Harmonic maps into Lie groups (Classical solutions of the chiral model)*, J. Differential Geom. **30** (1989), 1–50.

[Ve] J.L. Verdier , *Applications harmoniques de S^2 dans S^4:II*, Harmonic Mappings, Twistors, and σ-models, Advanced Series in Math. Phys. 4 (P. Gauduchon, ed.), World Scientific (Singapore) , 1988 , pp. 124-147 .

[Wd] J.C. Wood, *Explicit construction and parametrization of harmonic two-spheres in the unitary group*, Proc. London Math. Soc.(3) **58** (1989), 608–624 .

[ZM] V.E. Zakharov and A.V. Mikhailov, *Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method*, Sov. Phys. JETP 47 (1978), 1017–1027 .

[ZS] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, *Integration of non-linear equations of mathematical physics by the inverse scattering method II*, Funct. Anal. Appl. **13** (1979), 13–22 .